Diagonalisation des matrices

http://www.math-info.univ-paris5.fr/~ycart/MC2/node2.html

Sous-sections

- Matrices diagonales
- Valeurs propres et vecteurs propres
- Polynôme caractéristique
- Exemples
- Illustration par MuPad
- QCM corrigé

Matrices diagonales

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$, avec $d \geq 2$. Les éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont les *scalaires*. Toutes les matrices considérées sont des matrices carrées à d lignes et d colonnes. Les vecteurs sont identifiés à des matrices à d lignes et 1 colonne.

Une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

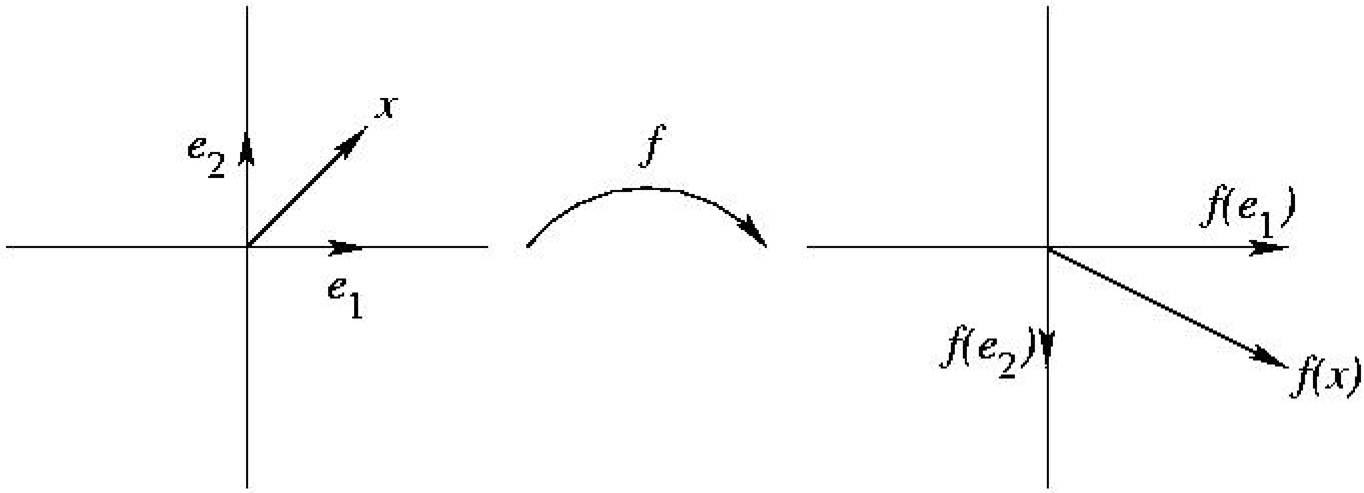
$$\forall i \neq j\,, \quad a_{i,j} = 0\,.$$

Elle est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \lambda_{d-1} & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}$$

Pour comprendre le rôle des coefficients diagonaux, supposons tout d'abord qu'ils sont tous égaux à λ. Dans ce cas, A est proportionnelle à la matrice identité : $A = \lambda I$. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d$, la vecteur Ax est proportionnel à x : $Ax = \lambda x$. Multiplier le vecteur x par la matrice A revient à le multiplier par le facteur λ. Géométriquement, c'est effectuer une *homothétie* de rapport λ. Supposons maintenant que les coefficients diagonaux soient quelconques. Considérons une base $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$, et examinons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$, de matrice A dans cette base. Dire que A est diagonale, c'est dire que l'image du vecteur e_i de la base est $\lambda_i e_i$. Si on restreint f à la direction e_i, f est une homothétie de rapport λ_i (voir figure ci-après). Si x est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^d$, x s'écrit $\sum x_i e_i$. Son image par f est :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{d} x_i \lambda_i e_i \; .$$



Endomorphisme du plan, de matrice diagonale. Les coefficients diagonaux sont 2 et -1.

Les matrices diagonales sont particulièrement simples à manipuler.
Voici les propriétés principales :

- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux.

$$Det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_d \; .$$

- Multiplier à gauche par une matrice diagonale revient à multiplier la i-ième ligne par λ_i : si $B = (b_{i,j})$ est une matrice quelconque, alors

$$AB = (\lambda_i\, b_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}\,.$$

- Multiplier à droite par une matrice diagonale revient à multiplier la j-ième colonne par λ_j : si $B = (b_{i,j})$ est une matrice quelconque, alors

$$BA = (b_{i,j}\,\lambda_j)_{i,j=1,\dots,d}\,.$$

- Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d\mu_d \end{pmatrix}$$

- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, la matrice est inversible :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_d} \end{pmatrix}$$

- La puissance n-ième d'une matrice diagonale est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d^n \end{pmatrix}$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations.

$$(a)\left\{\begin{array}{rrrcr} & y & +z & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ \frac{3}{2}x & -\frac{3}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 0 \\ & -y & & = & -1 \\ & & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations de récurrence.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & & v_n & +w_n \\ v_{n+1} & = & -\frac{1}{2}u_n & +\frac{3}{2}v_n & -\frac{1}{2}w_n \\ w_{n+1} & = & \frac{3}{2}u_n & -\frac{3}{2}v_n & +\frac{1}{2}w_n \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcrrr} u_{n+1} & = & u_n & & \\ v_{n+1} & = & & -v_n & \\ w_{n+1} & = & & & 2w_n \end{array}\right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations différentielles.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & & y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) & = & \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t) \end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & x(t) & & \\ y'(t) & = & & -y(t) & \\ z'(t) & = & & & 2z(t) \end{array}\right.$$

Les trois problèmes, de natures très différentes, ont en commun leur écriture matricielle, avec les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tous les problèmes linéaires sont plus faciles à résoudre quand la matrice est diagonale !

Il se trouve que les deux matrices A et D sont *semblables*, c'est à dire qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, ou encore, il existe une *matrice de passage* P telle que $P^{-1}AP = D$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Définition 12.1.1 Une matrice A est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à *diagonaliser* une matrice, quand c'est possible.

Définition 12.1.2 Diagonaliser une matrice A, c'est trouver une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que :

$$P^{-1}AP = D \Longleftrightarrow A = PDP^{-1} .$$

Pour illustrer l'intérêt de la diagonalisation, prenons l'exemple d'un système d'équations de récurrence linéaire, du type $U_{n+1} = AU_n$, où U_n désigne un vecteur dont on souhaite connaître l'expression en fonction de n. Du point de vue théorique, il n'y a pas de problème :

$$U_n = A^n U_0 .$$

Mais cela n'avance à rien si on ne sait pas calculer formellement l'expression de A^n en fonction de n. C'est possible si A est diagonalisable. En effet, si $A = PDP^{-1}$:

$$A^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1} .$$

Ecrire D^n est immédiat. On en déduit l'expression générale de A^n, donc de U_n. Dans l'exemple ci-dessus, on trouve :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{(-1)^n}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{2^n}{2}+\frac{1}{2} & \frac{2^n}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{2^n}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{(-1)^n}{2}+\frac{2^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}-\frac{2^n}{2} & \frac{(-1)^n}{2}+\frac{2^n}{2} \end{pmatrix}$$

Nous étudierons une méthode analogue pour la résolution des systèmes linéaires d'équations différentielles au chapitre Equations différentielles.

Les problèmes linéaires que l'on rencontre en pratique sont souvent de très grandes dimensions (parfois des milliers). Nous nous limiterons dans nos calculs aux dimensions 2 et 3. Le calcul formel d'une diagonalisation n'est possible que jusqu'à la dimension 4 puisqu'il implique de trouver les racines d'un polynôme dont le degré est la dimension (seules les équations polynomiales de degré ≤ 4 sont résolubles par radicaux). En grande dimension, il existe des méthodes numériques pour calculer des diagonalisations approchées.

Valeurs propres et vecteurs propres

Si A et D sont deux matrices telles que $P^{-1}AP = D$, alors $AP = PD$. Mais si D est une matrice diagonale, multiplier P à droite par D revient à multiplier les vecteurs colonnes de P par les coefficients diagonaux de D. Notons V_i le i-ième vecteur colonne de la matrice P et λ_i le i-ième coefficient diagonal de D. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, on doit avoir :

$$AV_i = \lambda_i V_i \iff (A - \lambda_i I)V_i = 0\,,$$

en notant I la matrice identité de dimension d. On dit que V_i est un *vecteur propre* de A associé à la *valeur propre* λ_i.

Définition 12.2.1 On dit que V est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si V est un vecteur non nul et :

$$AV = \lambda V \iff (A - \lambda I)V = 0\,.$$

Observons que λ ne peut être une valeur propre de A que si le système $(A - \lambda I)V = 0$ a une solution non nulle. Voici 2 manières équivalentes de l'exprimer (cf. Chapitre "Calcul matriciel").

Proposition 12.2.2 Un scalaire λ est valeur propre de la matrice A si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1. Le rang de la matrice $A - \lambda I$ est strictement inférieur à d.
2. Le déterminant de la matrice $A - \lambda I$ est nul :

$$Det(A - \lambda I) = 0\,.$$

Si λ est une valeur propre, l'ensemble des vecteurs V tels que $(A - \lambda I)V = 0$, est un sous-espace vectoriel. Par définition, il contient le vecteur nul, et tous les vecteurs propres de A associés à λ. On l'appelle le " *sous-espace propre*" associé à λ. Remarquons qu'un même vecteur propre ne peut être associé qu'à une seule valeur propre. Par conséquent, deux sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes ont une intersection réduite au vecteur nul.

Si une matrice A est diagonalisable ($P^{-1}AP = D$), alors les vecteurs colonnes de la matrice de passage P sont des vecteurs propres de A. Mais pour être une matrice de passage, P doit être inversible, c'est à dire que ses d vecteurs colonnes doivent former une base. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable est donc qu'elle admette d vecteurs propres formant une base.

Théorème 12.2.3 Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle admet d vecteurs propres linéairement indépendants.
Le résultat théorique le plus important concernant les vecteurs propres est le suivant.

Théorème 12.2.4 Soient $V_1, \ldots, V_k$ des vecteurs propres associés respectivement à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, toutes distinctes. Alors la famille de vecteurs $\{V_1, \ldots, V_k\}$ est une famille libre.
Démonstration : Nous allons montrer par récurrence sur k que :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \ , \ \forall i = 1, \ldots, k \ .$$

C'est vrai pour $k = 1$, puisque par définition un vecteur propre est nécessairement non nul. Supposons la propriété vraie à l'ordre $k-1$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes deux à deux et $V_1, \ldots, V_k$ des vecteurs propres associés. Supposons :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i V_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i V_i = -\alpha_k V_k \ .$$

En multipliant à gauche par la matrice A, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i V_i = -\alpha_k \lambda_k V_k \ .$$

Mais on a aussi :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_k V_i = -\alpha_k \lambda_k V_k \ .$$

Soit en soustrayant les deux équations :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) V_i = 0 \ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence à l'ordre $k-1$, ceci entraîne que pour tout $i = 1, \ldots, k-1$, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, donc $\alpha_i = 0$, puisque $\lambda_i \neq \lambda_k$. Mais alors nécessairement $\alpha_k V_k$ est nul, donc $\alpha_k = 0$ puisque le vecteur propre V_k est non nul. ❑

Ce théorème a deux conséquences pratiques importantes, qui sont rassemblées dans le corollaire suivant.

Corollaire 12.2.5

1. Une matrice de taille $d \times d$ admet au plus d valeurs propres distinctes.
2. Si une matrice A de taille $d \times d$ admet d valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Démonstration : Dans un espace de dimension d, une famille libre comporte au plus d vecteurs, il ne peut donc pas y avoir plus de d vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Si on a d valeurs propres distinctes, alors une famille de vecteurs propres dont chacun est associé à une des valeurs propres est nécessairement libre d'après le théorème précédent. Comme elle comporte d vecteurs, c'est une base. ❑

Polynôme caractéristique

Rappelons qu'un scalaire λ est valeur propre si et seulement si le déterminant de la matrice $A-\lambda I$ est nul. On commencera donc par calculer ce déterminant, appelé *polynôme caractéristique*.

Définition 12.3.1 On appelle polynôme caractéristique de la matrice A le polynôme en λ :

$$P_A(\lambda) = det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} (a_{1,1}-\lambda) & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & (a_{2,2}-\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & (a_{n,n}-\lambda) \end{vmatrix} .$$

Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré d en λ, dont les coefficients dépendent des $a_{i,j}$.

$$P_A(\lambda) = (-1)^d \lambda^d + (-1)^{d-1} tr(A) \lambda^{d-1} + \cdots + det(A) .$$

Cependant, on n'a pas intérêt à le développer. En effet le but est de trouver ses racines, qui sont les valeurs propres. On cherchera donc plutôt à *factoriser* $P_A(\lambda)$.

Si on travaille dans $\mathbb{R}$, il peut se faire que le polynôme n'ait pas que des racines réelles, auquel cas la matrice ne sera pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$, par contre, tout polynôme est scindé, c'est à dire qu'il admet d racines, si on les compte avec leur multiplicité. Nous supposerons désormais que $P_A(\lambda)$ est scindé, et qu'il admet pour racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, de multiplicités respectives $d_1, \ldots, d_k$: comme le polynôme est de degré d, la somme $d_1 + \cdots + d_k$ vaut d. On peut écrire :

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{d_1} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{d_k} .$$

La seconde étape d'une diagonalisation est la détermination des sous-espaces propres associés aux valeurs propres λ_i. Pour chaque valeur propre λ_i, on cherche l'ensemble des solutions du système $(A-\lambda_i)V=0$. On trouve comme ensemble de solutions un sous-espace vectoriel : le sous-espace propre associé à λ_i. On démontre, et nous admettrons, que sa dimension est nécessairement inférieure ou égale à la multiplicité d_i de la valeur propre.

Théorème 12.3.2 Pour tout $i=1,\ldots,k$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i a une dimension inférieure ou égale à la multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique.

La matrice A est diagonalisable si et seulement si pour tout $i=1,\ldots k$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i a pour dimension la multiplicité de λ_i.

Observons que si λ_i est valeur propre, il existe nécessairement un vecteur propre non nul associé à λ_i, par définition. Donc la dimension du sous-espace propre associé à λ_i est au moins 1. Le cas le plus simple est celui des valeurs propres de multiplicité 1. Dans ce cas la dimension du sous-espace propre est à la fois ≥ 1 et ≤ 1 : elle vaut nécessairement 1. Il suffit alors de trouver un vecteur propre : tous les autres seront proportionnels à celui-ci). On peut pour cela, soit résoudre le système $A-\lambda_i I=0$, soit utiliser la "méthode des cofacteurs", conséquence de la proposition ci-dessous.

Proposition 12.3.3 Soit λ une valeur propre de A, de multiplicité 1. Considérons une ligne de $A-\lambda I$, choisie de façon que la matrice formée des autres lignes soit de rang $d-1$. Le vecteur formé des cofacteurs associés à cette ligne (les $d-1$ déterminants extraits en barrant la ligne choisie et une colonne, avec alternance de signe) est un vecteur propre de A associé à λ.

Nous verrons plus loin des exemples d'utilisation de cette méthode, à utiliser surtout en dimensions 2 et 3.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Alternance de signes pour le calcul des cofacteurs.

Comme nous l'avons vu, certaines matrices ne sont diagonalisables que dans $\mathbb{C}$, car leur polynôme caractéristique n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$. D'autres ont un polynôme caractéristique scindé dans $\mathbb{R}$ mais elles ont des valeurs propres multiples et la dimension des sous-espaces propres n'est pas égale à la multiplicité. A part le cas où toutes les valeurs propres sont distinctes, il existe un cas particulier important de matrice diagonalisable, celui des matrices réelles symétriques. Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 12.3.4 Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ une matrice symétrique (telle que $a_{i,j} = a_{j,i}\,, \forall i, j = 1, \dots, d$). Toutes les valeurs propres de A sont réelles, A est diagonalisable et on peut choisir comme base de vecteurs propres une base telle que la matrice de passage P vérifie $P^{-1} = {}^tP$ (une telle base est dite orthonormée).

Le fait d'avoir une base orthornormée permet d'écrire l'inverse de la matrice de passage sans calcul supplémentaire (car $P^{-1} = {}^tP$). En revanche, transformer une base de vecteurs propres que l'on a obtenu par la méthode générale en une base orthonormée, requiert un calcul supplémentaire. Pour le calcul par ordinateur, il existe des algorithmes particuliers adaptés aux matrices symétriques.

Exemples

Nous détaillons d'abord l'exemple suivant, donné en introduction.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Commençons par écrire la matrice $A - \lambda I$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite calculer son déterminant. Il serait maladroit d'utiliser la règle de Sarrus pour développer le déterminant et le factoriser ensuite. Il vaut mieux le factoriser en faisant apparaître des zéros par combinaison de lignes et de colonnes. Ajoutons d'abord la seconde colonne à la première :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$$

On peut alors factoriser $(1 - \lambda)$ dans la première colonne :

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix}$$

Soustrayons ensuite la première ligne à la seconde :

$$P_A(\lambda)=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant selon la première colonne, il reste un déterminant d'ordre 2qui est facile à factoriser.

$$P_A(\lambda)=(1-\lambda)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\Big((\tfrac{1}{2}-\lambda)^2-(\tfrac{3}{2})^2\Big)=(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)$$

Les valeurs propres de Asont donc 1, -1 et 2. Comme elles sont distinctes, il suffit de trouver un vecteur propre pour chacune. Commençons par la valeur propre 1.

$$A-I=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Observons que la matrice $A-I$ est bien de rang 2, comme prévu : la somme des trois lignes est nulle et les deux premières lignes sont indépendantes. Nous allons calculer les cofacteurs associés à la troisième ligne. Ils valent (attention à l'alternance de signe) :

$$C_1=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-1\ ,\ C_2=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-1\ ,\ C_3=+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=0\,.$$

Tous les vecteurs non nuls, proportionnels au vecteur ${}^t(-1,-1,0)$ sont vecteurs propres de A, associés à la valeur propre 1. Il est conseillé de choisir le plus simple, ici :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le choix de la troisième ligne, pour calculer les cofacteurs, est arbitraire. Il suffit que les deux lignes qui restent ne soient pas proportionnelles (car tous les cofacteurs seraient nuls). Voici par exemple les cofacteurs associés à la deuxième ligne.

$$C_1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1\ ,\ C_2 = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1\ ,\ C_3 = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0\ .$$

On pourra trouver un vecteur différent, mais il sera forcément proportionnel à celui qu'on trouve avec une autre ligne. Cela ne change rien au choix du vecteur propre. Passons maintenant à la valeur propre -1.

$$A - (-1)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Les cofacteurs associés à la troisième ligne sont :

$$C_1 = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -3\ ,\ C_2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0\ ,\ C_3 = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 3\ .$$

Ici encore, nous choisirons un vecteur plus simple, proportionnel au vecteur des cofacteurs.

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voici le calcul pour la valeur propre 2 :

$$A-2I=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Les cofacteurs associés à la troisième ligne sont :

$$C_1=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=0\,,\; C_2=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{3}{2}\,,\; C_3=+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{3}{2}\,.$$

Nous choisirons un vecteur plus simple, proportionnel au vecteur des cofacteurs.

$$V_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage P sera constituée en juxtaposant les trois vecteurs V_1, V_2, V_3 (en colonnes).

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice diagonale D a pour coefficients diagonaux les trois valeurs propres (attention : l'ordre des valeurs propres et des vecteurs propres doit être le même).

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il reste à calculer P^{-1} si on veut utiliser la diagonalisation sous la forme $A=PDP^{-1}$. Observons que la diagonalisation trouvée est loin d'être unique. On peut choisir un ordre différent pour les valeurs propres, et pour chaque valeur propre, n'importe quel vecteur non nul proportionnel à celui qui a été trouvé. On pourra vérifier par exemple, pour la même matrice Aque les matrices Pet Dci-dessous vérifient également $P^{-1}AP = D$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous donnons ci-dessous sans le détailler un exemple du même type, qu'il est conseillé de traiter pour bien comprendre la méthode.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Dans l'exemple ci-dessous, la matrice Aest symétrique. Pour le choix des vecteurs propres, nous avons fait en sorte que $P^{-1} = {}^tP$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D}$$

Voici un exemple en dimension 2, où les valeurs propres sont des nombres complexes. La matrice Aest la matrice de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{D}$$

Voici maintenant un exemple où la valeur propre 1 est double. La méthode des cofacteurs ne s'applique pas pour trouver les vecteurs propres correspondants : il faut résoudre le système $(A-I)X=0$, et choisir deux vecteurs non proportionnels (les plus simples possibles) parmi les solutions.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$$

Le lecteur pourra vérifier que les deux matrices suivantes, qui ont une valeur propre double, ne sont pas diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Voici pour finir quelques systèmes d'équations de récurrence, du type $U_{n+1} = AU_n$. Pour déterminer l'expression explicite de $U_n = A^n U_0$, il faut diagonaliser la matrice A, et calculer l'expression $PD^nP^{-1}U_0$.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{2}v_n \end{cases} , \quad u_0 = 0 \ , \ v_0 = 1 \ .$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -5u_n + 6v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 4v_n \end{cases} , \quad u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \ .$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{5}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3}v_n \end{cases} , \quad u_0 = 2 \ , \ v_0 = 1 \ .$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} , \quad u_0 = 1 \ , \ v_0 = 1 \ .$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases} , \quad u_0 = 1 \, , \; v_0 = 1 \, .$$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases} , \quad u_0 = 1 \, , \; v_0 = 2 \, .$$

Illustration par MuPad

En MuPad, on construit des matrices à l'aide du constructeur `Dom::Matrix()`. La somme et le produit matriciel sont notés naturellement par les symboles `+` et `*`. Des fonctions permettant d'effectuer de nombreuses manipulations sur les matrices figurent dans le module d'algèbre linéaire `linalg`, qu'il faut charger par `export(linalg)`. Voici les fonctions matricielles principales.

Traitement de matrices	
`transpose`	Transposée
`det`	Déterminant
`rank`	Rang
`eigenvalues`	Valeurs propres
`eigenvectors`	Vecteurs propres
`A^n`	Puissance d'une matrice
`exp(A)`	Exponentielle d'une matrice
`matlinsolve`	Résout un système linéaire
`1/A`	Matrice inverse

Voici quelques lignes d'illustration.

```
/* Charger les fonctions d'algebre lineaire et definir les matrices */

export(linalg);
Matrice:=Dom::Matrix():
A := Matrice([[0,1,1],[-1/2,3/2,-1/2],[3/2,-3/2,1/2]]);
P := Matrice([[1,-1,0],[1,0,1],[0,1,-1]]);

/* Verifier la diagonalisation */

A*P;
Pinv := 1/P;
Pinv*A*P;

/* Definir le polynome caracteristique */

Id := Matrice([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]]);
PA := x->det(A-x*Id);
PA(2);
factor(PA(x));
```

```
/* Calcul direct des valeurs propres */

eigenvalues(A);

/* Calculer des vecteurs propres */

Nul = Matrice([[0],[0],[0]]);
matlinsolve(A-Id,Nul);
matlinsolve(A+Id,Nul);
matlinsolve(A-2*Id,Nul);

/* Calcul direct de la diagonalisation */

eigenvectors(A);

/* Puissance n-ieme de A */

Dn := Matrice([[1,0,0],[0,(-1)^n,0],[0,0,2^n]]);
An := P*Dn*Pinv;

/* Verifications */

subs(An,n=1)-A;
subs(An,n=2)-A*A;
subs(An,n=10)-A^10;
```

QCM corrigé

Exercice 12.1 Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- Toute matrice admet au moins une valeur propre, réelle ou complexe.
- Toute matrice admet une infinité de vecteurs propres, à coordonnées réelles ou complexes.
- Toute matrice réelle 2×2 admet une valeur propre réelle.
- Toute matrice réelle 3×3 admet une valeur propre réelle.
- Toute matrice réelle 2×2 admet un vecteur propre à coordonnées réelles.
- Toute matrice réelle 3×3 admet un vecteur propre à coordonnées réelles.
- Si une matrice 2×2 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, alors elle admet une seule valeur propre.
- Si une matrice est triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
- Toute matrice a au moins deux valeurs propres distinctes.
- Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.
- Les valeurs propres du produit de deux matrices sont les produits des valeurs propres des deux matrices.
- Si un vecteur est vecteur propre pour deux matrices, il est vecteur propre de leur produit.
- Les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée sont les mêmes.

- Les vecteurs propres d'une matrice et ceux de sa transposée sont les mêmes.

- Le produit d'une matrice par un de ses vecteurs propres ne peut pas être le vecteur nul.

- Si une matrice a toutes ses valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable.

- Si une matrice $d \times d$ a d valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

- La somme des valeurs propres d'une matrice est égale au produit de ses éléments diagonaux.

- Le produit des valeurs propres d'une matrice est égal à son déterminant.

- La matrice de la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$ dans le plan admet des valeurs propres réelles.

- La matrice d'une symétrie vectorielle dans le plan a pour valeurs propres $+1$ et -1.

- Si v est vecteur propre d'une matrice, alors $-v$ est aussi vecteur propre de cette matrice.

- Si v et w sont vecteurs propres d'une même matrice, alors $v + w$ est toujours vecteur propre de cette matrice.

Exercice 12.2 Soit A une matrice et λ une de ses valeurs propres. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- 0 est valeur propre de $(A - \lambda I)(A + \lambda I)$.

- 0 et 1 sont valeurs propres de $A^2 - A$.

- ($\lambda^2 - 1$) est valeur propre de $(A - I)(A + I)$.

- Le rang de la matrice $A-\lambda I$ est égal à $d-1$.

- L'ensemble des solutions x du système $(A-\lambda I)x=0$ n'est pas réduit au vecteur nul.

- Le système linéaire $Ax=\lambda y$ admet une solution x non nulle, pour tout y.

- Le système linéaire $Ax=\lambda x$ admet une solution x non nulle.

- La matrice des cofacteurs de $A-\lambda I$ a toutes ses lignes proportionnelles.

- La matrice des cofacteurs de $A-\lambda I$ ne peut pas être nulle.

- Si A est diagonalisable, la dimension du sous-espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ.

- La dimension du noyau de $A-\lambda I$ est 1 si et seulement si la multiplicité de λ est 1.

- Si la multiplicité de λ est 1, alors toutes les lignes de la matrice des cofacteurs appartiennent au sous-espace propre de A associé à λ.

- Si la multiplicité de λ est 1, alors toutes les lignes de la matrice des cofacteurs sont des vecteurs propres de A associés à λ.

Exercice 12.3 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- Les colonnes de A sont des vecteurs indépendants.

- A admet 0 pour valeur propre.

- A admet 2 pour valeur propre.

- La somme des valeurs propres de A vaut 2.
- Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa troisième coordonnée nulle.
- La matrice $A+I$ est de rang 2.
- Le déterminant de $A-I$ est nul.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- A^5 est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.4 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- Les colonnes de A sont des vecteurs indépendants.
- A admet 0 pour valeur propre.
- A admet 1 pour valeur propre.
- A n'admet pas d'autre valeur propre que 0 et 1.
- Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa troisième coordonnée nulle.
- Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 a sa troisième coordonnée nulle.
- La matrice $A-I$ est de rang 2.
- 1 est valeur propre simple de A.
- A est diagonalisable.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- Les colonnes de A sont des vecteurs indépendants.
- A admet 0 pour valeur propre.
- A admet 1 pour valeur propre.
- A n'admet pas d'autre valeur propre que 0 et 1.
- Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 0 a sa troisième coordonnée nulle.
- Tout vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 a sa troisième coordonnée nulle.
- La matrice $A - I$ est de rang 2.
- 1 est valeur propre simple.
- A est diagonalisable.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

Exercice 12.6 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies ?

- Le produit des valeurs propres de A est 2.

- A admet une valeur propre réelle.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- Le vecteur $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.
- $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ est valeur propre de A.
- $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ est valeur propre de A.
- Le carré de A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$.
- Le carré de l'inverse de A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$.
- Si les suites (u_n) et (v_n) sont solution du système $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ alors elles sont périodiques, de période 8.
- Si les suites (u_n) et (v_n) sont solution du système $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$ alors les suites $(u_n/2^{n/2})$ et $(v_n/2^{n/2})$ sont périodiques, de période 8.