Eléments de cours de

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Yann VAILLS

Bibliographie :

- Ondes élastiques dans les solides, application au traitement du signal, E. DIEULESAINT et D. ROYER, *ed. Masson (1996)*
- Physique des solides, Neil-W Ashcroft, N-David Mermin *ed. EDP Sciences (2002)*
- Introduction to Solid State Physics, Charles Kittel *7th edition John Wiley & Sons, Inc. 1996* ou éditions françaises plus anciennes
- Mécanique des milieux déformables, équations générales, solides élastiques, fluids, turbomachines, Mostafa FOURAR et Claude CHEZE, *Ellipses (2002)*
- Résistance des matériaux, Pierre AGATI, Frédéric LEROUGE et Marc ROSSETO, *DUNOD (1999)*
- Mécanique des matériaux solides, Jean LEMAITRE et Jean-Louis CHABOCHE, *DUNOD (1996)*

Cours donné dans le cadre de la 1ère année des Masters

- Matériaux Diagnostic et Simulation
- Energétique et Environnement
- Instrumentation Contrôle et Management des Systèmes

VECTEURS – TENSEURS- PROBLEMES RELATIFS AUX CHANGEMENTS DE REPERES - SYMETRIES

<u>I. Loi de Curie</u> ou : « Comment trouver un lien élémentaire entre cause et effet »

« Dans un processus physique la symétrie des effets est supérieure à la symétrie des causes : on ne peut pas perdre de symétrie au cours d'un processus physique. »

Exemples :

- Réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir : la loi de Curie montre que le rayon réfléchi est dans le plan défini par le rayon incident et la normale au miroir
- L'action d'un champ magnétique sur un fil parcouru par un courant électrique : la loi de Curie montre que le fil est soumis à une force qui se trouve dans le plan perpendiculaire au champ magnétique
- La loi de Curie monte que l'effet piézoélectrique ne peut avoir lieu que dans des milieux dont le groupe de symétrie ne contient pas de centre d'inversion

A partir de ce point le problème posé est celui de la traduction mathématique de la relation entre causes et effets.

Dans les milieux anisotropes une cause ***C*** appliquée suivant une direction donne naissance à un effet ***E(C)***, en général non parallèle à la cause.

Illustration : dans un milieu non ordonné on a une relation scalaire entre champ électrique appliqué et densité de courant induite : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Par contre dans les milieux anisotropes $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ne sont généralement pas parallèles.

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\gamma}}\,\vec{E} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

La notion de **« tenseur »** apparaît donc dès que l'on veut établir des **relations linéaires** entre **causes *C* et effets *E*** dans les milieux anisotropes.

Si *C* et *E* sont des grandeurs vectorielles, en se limitant au domaine linéaire la relation entre les composantes C_1 C_2 et C_3 des causes et E_1 E_2 et E_3 des effets fait intervenir 9 cœfficients A_{ij}

C_i ou E_j et A_{ij} sont de natures différentes :

- C_i ou E_j sont des grandeurs physiques, elles caractérisent l'état du milieu physique, elles peuvent être nulles ou non
- A_{ij} ces coefficients caractérisent une propriété du matériau, ils ne peuvent pas être tous nuls.

Quelques exemples de tenseurs :

- tenseur de rang 0 (scalaire) :
  - densité, chaleur spécifique (propriétés)
  - température (grandeur d'état du milieu)
- tenseur de rang 1 (vecteur) :
  - pyroélectricité (propriétés)
  - champ électrique, force (grandeurs d'état du milieu)
- tenseur de rang 2 : permittivité diélectrique ε_{ij}
- tenseur de rang 3 : piézoélectricité d_{ijk}
- tenseur de rang 4 : élasticité C_{ijkl}

II. Coordonnées covariantes et contravariantes

Soient une espace vectoriel E et deux bases dans cet espace $\{|e_i\rangle\}$ et $\{|e_i'\rangle\}$ $i = 1,\ 2,\ 3$

$$|e_j\rangle = \sum_i a_j^i |e_i'\rangle) = a_j^i |e_i'\rangle$$

en notation d'Einstein
(sommation sur les indices répétés)

$$\left(|e_1\rangle |e_2\rangle |e_3\rangle\right) = \left(|e_1'\rangle |e_2'\rangle |e_3'\rangle\right) \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

Sommation sur les lignes

a_j^i

Indice de ligne

Indice de colonne

Problème de la transformation des vecteurs et de leurs coordonnées dans un changement de repère :

soit $|V\rangle \in E$, $|V\rangle = \alpha^j |e_j\rangle$ *et* $|V\rangle = \beta^i |e_i'\rangle$

donc $\alpha^j |e_j\rangle = |V\rangle = \beta^i |e_i'\rangle = \alpha^j a_j^i |e_i'\rangle$

<u>*Remarque :*</u> pour représenter les vecteurs on utilise ici la notation $\langle\ |$: appelé « ***bra*** » pour les *vecteurs lignes* et $|\ \rangle$ appelé « ***ket*** » pour les *vecteurs colonnes*, provenant de l'anglais « ***bracket*** » : signifiant « crochets ».

soit $\beta^i = \alpha^j a_j^i$ de même $\alpha^j = b_k^j \beta^k$

d'où $\beta^i = a_j^i b_k^j \beta^k$ donc $a_j^i b_k^j = \delta_k^i$ on a donc $\left[a_j^i\right]^{-1} = \left[b_j^i\right]$

on pourra donc écrire :

$$\left.\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} \right\}$$ Sommation sur les colonnes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] |e_j\rangle & & |e_i'\rangle \\ & |V\rangle \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \alpha^j & & \beta^i \end{tikzcd}$$

$$|e_j\rangle = a^i_j |e_i'\rangle \xrightarrow{\textit{covariant}} |e_i'\rangle = b^j_i |e_j\rangle$$

$$\alpha^j = b^j_i \beta^i \xrightarrow{\textit{contravariant}} \beta^i = a^i_j \alpha^j$$

En physique dans 95% des cas on travaille avec des repères orthonormés. Dans ce cas la matrice de changement de base est unitaire, et on a :

$$\boxed{B = \left[b^i_j\right] = A^{-1} = A^t = \left[a^j_i\right]}$$

soit : $a^j_i = b^i_j$ d'où :

$$|e_j\rangle = a^i_j |e_i'\rangle \qquad\qquad |e_i'\rangle = a^i_j |e_j\rangle$$

$$\alpha^j = a^i_j \beta^i \qquad\qquad \beta^i = a^i_j \alpha^j$$

on change alors de notation en amenant les deux indices en bas, l'indice de ligne devenant le premier des deux :

$$|e_j\rangle = a_{ij} |e_i'\rangle \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} |e_i'\rangle = a_{ij} |e_j\rangle \\ \beta_i = a_{ij} \alpha_j \end{array}}$$

$$\alpha_j = a_{ij} \beta_i$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & a_{ij} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Indice de ligne} & & \text{Indice de colonne} \end{tikzcd}$$

III. Notion de tenseur

III .1. Transformation des composantes d'un tenseur

Soient deux repères orthonormés munis des deux bases suivantes $(|e_i\rangle)$ et $(|e_i'\rangle)$

Soient deux vecteurs et leurs coordonnées dans les deux repères :

$$|p\rangle \quad : \quad (p_i) \text{ et } (p_i') \qquad\qquad |q\rangle \quad : \quad (q_i) \text{ et } (q_i')$$

$$i = 1,2,3$$

ces deux vecteurs représentent des grandeurs physiques reliées entre elles par une propriété traduite par un tenseur T. On peut écrire les relations suivantes :

$$p_i = T_{ij}\, q_j \qquad \text{et} \qquad p_k' = T_{kl}' q_l'$$

soit :
$$\left|\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{matrix}\right\rangle = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \left|\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{matrix}\right\rangle$$

et :
$$\left|\begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{matrix}\right\rangle = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} \left|\begin{matrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{matrix}\right\rangle$$

or $p_k' = a_{ki}\, p_i = a_{ki} T_{ij}\, q_j$ de plus $q_j = a_{lj}\, q_l'$ donc

$$p_k' = a_{ki} a_{lj} T_{ij} q_l' = T_{kl}' q_l'$$

soit :

$$\boxed{T_{kl}' = a_{ki}\, a_{lj} T_{ij}} \qquad \text{et} \qquad T_{kl} = a_{ik}\, a_{jl} T_{ij}'$$

par ailleurs $x_k' = a_{ki} x_i$ et $y_l' = a_{lj} y_j$

$$\text{donc} \qquad \boxed{x_k' y_l' = a_{ki} a_{lj} x_i y_j}$$

Ce qui démontre que les composantes d'un tenseur de rang 2 se transforment comme un produit de 2 composantes de vecteur.
On admettra que cette propriété des tenseurs de rang 2 se généralise aux tenseurs de rang n soit : **les composantes d'un tenseur de rang *n* se transforment comme le produit de n composantes de vecteurs.** Ainsi on écrira :

$$A'_{...ijk...} = ...a_{il} a_{jm} a_{kn} ... A_{...lmn...}$$

Ceci provient de ce qu'un tenseur de rang n peut être considéré comme le produit tensoriel de n tenseur de rang 1.

III .2. Eléments de symétrie des cristaux et composantes indépendantes des tenseurs (réduction des tenseurs)

$A_{...ijk...}$ sont les composantes, dans un repère $Ox_1x_2x_3$ d'un tenseur traduisant une propriété donnée d'un certain cristal.

$A'_{...ijk...}$ sont les composantes de ce tenseur dans le même repère et pour **une orientation nouvelle du cristal** obtenue en appliquant une opération de symétrie $\mathcal{S}$, appartenant au groupe de symétrie ponctuelle du cristal.

Il revient au même d'appliquer $\mathcal{S}^{-1}$ au système d'axes en laissant le cristal dans son orientation initiale.

[a] = matrice de changement de repère associée à $\mathcal{S}^{-1}$, on a :

$$A'_{...ijk...} = ...a_{ip}a_{jq}a_{kr}...A_{...pqr...}$$

$\mathcal{S}$ étant une opération de la classe de symétries ponctuelles du cristal, la nouvelle orientation est indiscernable de celle de départ donc :

$$A'_{...ijk...} = A_{...ijk...}$$

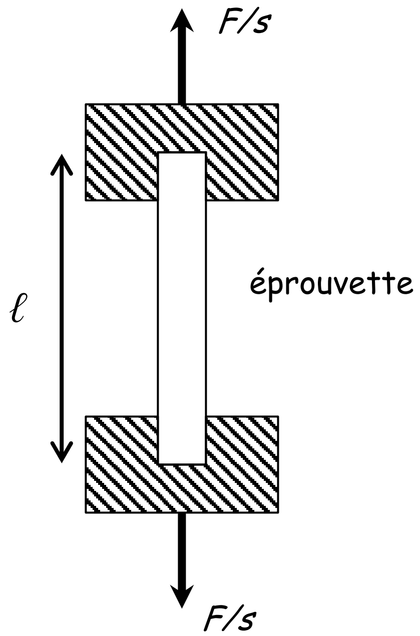
Ainsi l'invariance des propriétés physiques au cours des opérations de symétries impose des relations entre les termes des tenseurs, réduisant le nombre des termes indépendants.

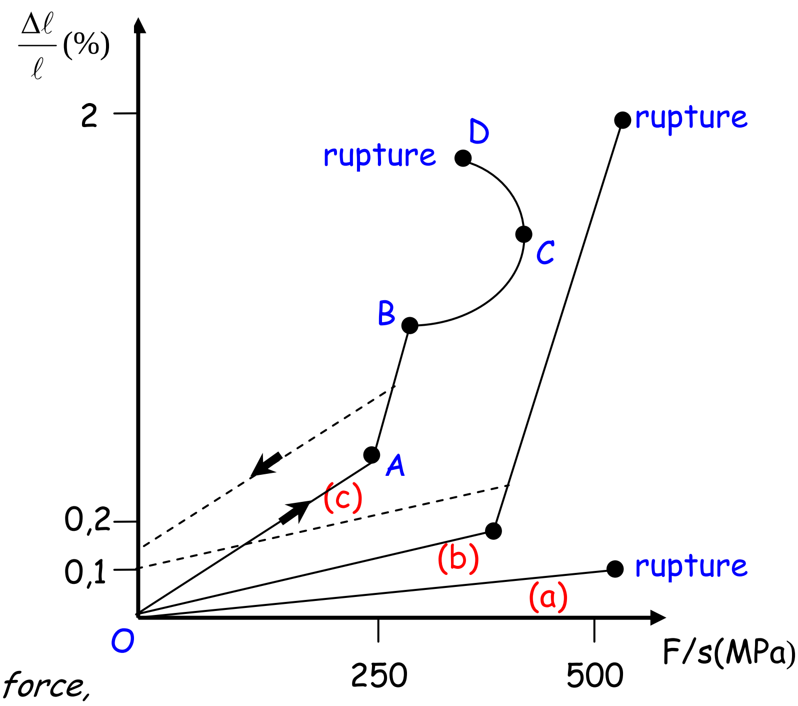
$$\boxed{A_{..ijk..} = ..a_{ip}a_{jq}a_{kr}..A_{..pqr..}}$$

Les relations précédentes réduisent généralement le nombre des composantes indépendantes des tenseurs.

PROPRIETES MECANIQUES DE LA MATIERE
A. ELASTICITE STATIQUE

L'application d'efforts à un solide provoque des déplacements d'ensemble et des déformations (variations de directions et de distances relatives entre les points). On ne s'intéresse ici qu'aux dernières.





F/s contrainte exercée : F = force,
s = section de l'éprouvette

Dans le domaine des petites déformations réversibles, la relation entre efforts et déformations est linéaire, c'est le domaine de l'élasticité.

(a) : rupture fragile, c'est le cas des céramiques ou des verres en général

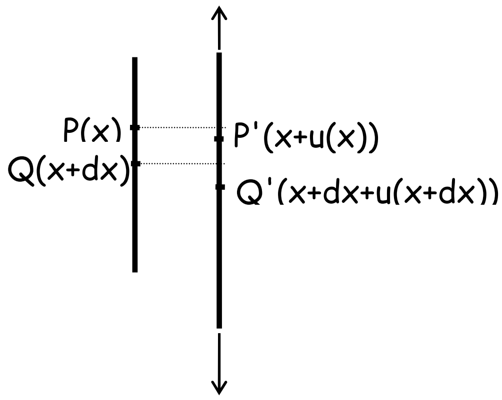
(b) et (c) : minéraux, métaux, plastiques, bois…

OA : zone d'élasticité (réversible)
AB : zone de plasticité (apparition d'étirements irréversibles)
BC : zone de durcissement
CD : étirements locaux
D : rupture

I. Déformations élastiques

I.1. Déformation unidimensionnelle

L'allongement d'un fil soumis à une force $\vec{F}$ va permettre d'introduire les grandeurs que l'on retrouvera dans un cas plus général.



PQ = dr
P'Q' = dr'

$dr' - dr$ caractérise la déformation du segment PQ ici $dr' - dr = u(x+dx) - u(x)$

$$dr' - dr = \frac{\partial u}{\partial x} dx = du$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ caractérise la déformation et est sans dimension. La position du point choisi comme origine est sans importance.

I.2. Déformation tridimensionnelle

$P(x_1, x_2, x_3)$

$Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$

On exerce une contrainte sur le segment PQ $\Rightarrow$ P'Q'

$$P'\begin{pmatrix} x_1 + u_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2 + u_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 + u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

$$Q'\begin{pmatrix} x_1 + dx_1 + u_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ x_2 + dx_2 + u_2(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ x_3 + dx_3 + u_3(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \end{pmatrix}$$

$$\left|dV\right\rangle = \left|dr'\right\rangle - \left|dr\right\rangle = \begin{pmatrix} du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ du_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\left|\boldsymbol{dV}\right\rangle = \left|\boldsymbol{dr'}\right\rangle - \left|\boldsymbol{dr}\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

soit : $\left|dV\right\rangle = [V]\left|dr\right\rangle$

[V] est appelé **tenseur des variations**, il traduit non seulement les déformations, mais aussi, les éventuelles rotations et translations d'ensemble (qui ne sont pas des déformations puisqu'elles conservent les longueurs).

Le tenseur *[V]* traduit aussi une modification des distances entre points. Vérifions-le en calculant $dr'^2 - dr^2$:

$$dr'^2 - dr^2 = (dx_1 + du_1)^2 + (dx_2 + du_2)^2 + (dx_3 + du_3)^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

$$= 2\,(dx_1\,du_1 + dx_2\,du_2 + dx_3\,du_3) + du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$$

Or dans le domaine des déformations élastiques les déformations sont très petites par rapport aux dimensions des objets.

Donc $du_k du_l \ll dx_i du_j$ (généralement $\approx 10^{-2}$ à 10^{-3} fois plus petit) et on peut écrire :

$$dr'^2 - dr^2 \# 2\,(dx_1\,du_1 + dx_2\,du_2 + dx_3\,du_3)$$

soit encore :

$$dr'^2 - dr^2 = 2\,(dx_1\,du_1 + dx_2\,du_2 + dx_3\,du_3)$$

et
$$dr'^2 - dr^2 = 2\langle dr | dV \rangle$$

$$\boxed{dr'^2 - dr^2 = 2\langle dr | V | dr \rangle}$$

quadrique associée à [V]

Propriétés d'un tenseur : on peut l'écrire sous la forme de la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. D'où :

$$[V]=[S]+[A]$$

$$[V]=\begin{bmatrix} V_{11} & \frac{V_{12}+V_{21}}{2} & \frac{V_{13}+V_{31}}{2} \\ \frac{V_{21}+V_{12}}{2} & V_{22} & \frac{V_{23}+V_{32}}{2} \\ \frac{V_{31}+V_{13}}{2} & \frac{V_{32}+V_{23}}{2} & V_{33} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{V_{12}-V_{21}}{2} & \frac{V_{13}-V_{31}}{2} \\ -\frac{V_{12}-V_{21}}{2} & 0 & \frac{V_{23}-V_{32}}{2} \\ -\frac{V_{13}-V_{31}}{2} & -\frac{V_{23}-V_{32}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

La quadrique associée à un tenseur antisymétrique étant nulle il reste :

$$\boxed{dr'^2-dr^2=2\langle dr|S|dr\rangle}$$

Donc ce qui caractérise les déformations est la partie symétrique du tenseur des variations.

On appelle ***[S] : tenseur des déformations***

$$\boxed{S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}\text{ avec i, j = 1, 2, 3}$$

I.3. Signification des termes du tenseur de déformations

a) Trace de *[S]*

La trace de *[S]* est égale à la dilatation relative

$$\boxed{\theta = \frac{d\tau}{\tau} = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}}$$

en effet :

$$d\tau = \tau' - \tau = (dx_1+du_1)(dx_2+du_2)(dx_3+du_3) - dx_1dx_2dx_3$$

$$= dx_1dx_2du_3 + dx_1dx_3du_2 + dx_3dx_2du_1 + dx_1du_2du_3 + dx_2du_3du_1 + dx_3du_2du_1 + du_1du_2du_3$$

$$\# \ dx_1dx_2du_3 + dx_1dx_3du_2 + dx_3dx_2du_1$$

avec $\tau = dx_1dx_2dx_3$ il vient immédiatement :

$$(\tau'-\tau)/\tau = du_1/dx_1 + du_2/dx_2 + du_3/dx_3$$

b) Allongement relatif dans une direction donnée

L'allongement relatif dans une direction $|n\rangle$ est égal à la quadrique de *[S]* pour cette direction :

$$\boxed{\frac{\Delta\ell}{\ell}(|n\rangle) = \langle n|S|n\rangle}$$

en effet :

$$dr'^2 - dr^2 = (dr'-dr)(dr'+dr) \ \# \ 2\,dr(dr'-dr)$$

donc :

$$dr(dr'-dr) = \langle dr | V | dr \rangle$$

soit :

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{(dr'-dr)}{dr} = \frac{\langle dr | V | dr \rangle}{dr^2} = \langle n | V | n \rangle = \langle n | S | n \rangle$$